جامعة البعث

كلية العلوم



قسم الرياضيات

السنة الثانية

العام الدراسي : 2017 / 2018

طبولوجيا (1)

المحاضرة النظرية الأولى

(المحاضرة التمهيدية)

إعدَاد :

داني محفوض – وهب الحسن

تدقيق علمي :

أ. خالد عباس

 Facebook: Dani Mahfoud

 Facebook: Wahab Al-Hasan

أولاً : تمهيد عام للطبولوجيا

في البداية ، إنّ ما يتوجّب علينا استيعابه هو المعنى العام لكلمة **"طبولوجيا"** ---
العنوان العريض لأحد مباحث الرياضيات التي باتت تشكل فرعاً مستقلاً في العلوم الرياضيّة .

إنّ كلمة "طبولوجيا" تعود في أصلها إلى اليونانية ، وَ إنّ المفتاح الأول لفهم معنى هذه الكلمة هو قراءتها بالإنكليزية :

TOPOLOGY [قراءتها] ⟵ توبولوجيا

وَ نحن العرب نقرأها **طبولوجيا** وذلك تبعاً لإمكانية تثقيل بعض الحروف العربية ، بمعنى أننا نقول مثلاً (سقراط) وَ لا نقول (سقرات) وَ على ذات المبدأ في كلمة طبولوجيا ، وَ الفارق بين العربية وَلغات أخرى ، هو افتقار اللغات الأخرى لبعض اللفظات الثقيلة أوْ المفخمة ، مثل لفظة « الطاء » .

ماذا تعني هذه الكلمة ؟

إنّ كلمة TOPOLOGY هي دمج لاصطلاحين :

TOPO : (توبو) : وَ تعني هذه الكلمة "موضع" .

LOGY : (لوجي) : وَ هي لاحقة تضاف لاصطلاح علمي ليتخصّص بها تسميةً لعلم يقوم على هذا الاصطلاح ، بمعنى أنّ (LOGY) تعني ←

تعني « علم » . إذاً ---

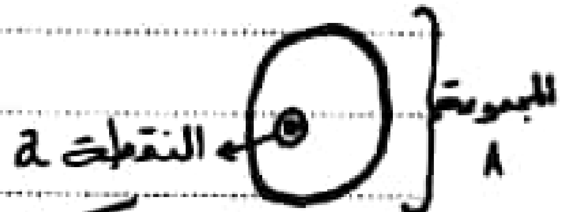
ToPoLogy

علم   الموضع

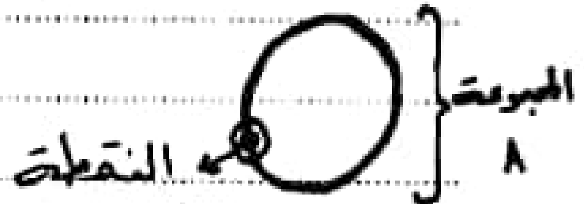
إذا --- الطبولوجيا هي علم التموضع .

- سنطرح مثالاً بسيطاً لنفهم من خلاله ما المقصود باصطلاح « التموضع » :

لتكن: لدينا المجموعة A ، وَ لتكن a نقطة (عنصر) من المجموعة A ، لاحظ حالات تموضع النقطة a في المجموعة A :



في هذه الحالة ، النقطة a هي عنصر من عناصر المجموعة A ونقول أنَّ a هي نقطة داخلية .



في هذه الحالة ، النقطة a تقع على حدود (جبهة) المجموعة A ، فهي نقطة جبهية .



أمّا في هذه الحالة ، النقطة a تقع خارج المجموعة A ، فهي لا تنتمي إلى المجموعة A ، فأقول :

a هي نقطة خارجية .

لاحظ الحالات الثلاث لتموضع النقطة a :

1) النقطة a داخلية بالنسبة للمجموعة A .

2) النقطة a جبهية أو حدودية بالنسبة للمجموعة A .

3) النقطة a خارجية بالنسبة لهذه المجموعة A .

تلك الحالات الثلاث قد تعطينا لمحة بسيطة عن ما قلناه ، « علم التموضع »

- مثال آخر لنفهم أكثر معنى التموضع :

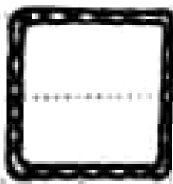
لو أخذنا قطعة موصولة من مادة مطاطية (أي المطاطة التي نعرفها بالعادة).

إن المطاطة بهذه الحالة تأخذ شكل منحنٍ مغلق. ← مطاطة

لاحظ أننا لو قمنا بمط هذه المطاطة سيتغير شكلها و يمكن أن نحصل على أشكال أخرى :







لاحظ هنا المطاطة التي تكونت منها المطاطة تتموضع بطريقة تشكل مثلث

و هنا مستقيم .

و هنا مربع .

(و تتموضع أيضاً بأشكال كثيرة أخرى)

نذكر المثال الثالث و الأخير :

ليكن لدينا المجالات $[a,b]$ ، $[a,b[$ ، $]a,b[$

1) في المجال $[a,b]$ ، لاحظ أن حالة تموضع a و b هي أن a و b ينتميان إلى المجال.

2) في المجال $[a,b[$ ، a تنتمي إلى المجال و b لا تنتمي.

3) في المجال $]a,b[$ كلا العنصرين a و b لا ينتميان إلى المجال.

ملاحظة : هذه المجالات حقيقية.

فهمنا من الأمثلة الثلاثة السابقة معنى كلمة تموضع ، و لكن ! "فعلياً" ماهي علاقة هذه الأمثلة بالطبولوجيا ؟

- لاحظ في المثال الأول : عندما اختلفت حالات تموضع النقطة a بالنسبة للمجموعة A ، هل تغيرت المجموعة A ؟ أو حتى النقطة a ، هل تغيرت ؟ طبعاً لا ...

الذي تغير هو التموضع فقط.

- لاحظ في المثال الثاني : عندما قمنا بمط المطاطة و حصلنا منها على أشكال مختلفة ، هل تغيرت المطاطة ؟ هل ازداد عدد نقاطها ؟ أو حتى نقص ؟ طبعاً لا ....

- ماحصل هو تغير شكل المطاطة فقط ! ←

أوْ تغيّرَ تموضع نقاط المطاطة فقط !

- في المثال الثالث ، باختلاف الحالات الثلاث لتموضع (انتماء) العناصر a وَ b للمجال (المجموعة) ، هل تغيرت قدرة المجموعة ؟

طبعا لا ـــ

* وَ ذلك لأنَّ : عند إضافة أوْ حذف عدد منتهٍ مِنَ النقاط من مجموعة غير منتهية لا يغير من قدرة المجموعة .

ملاحظة (1) : المجموعة الغير منتهية هي مجموعة غير قابلة للعد إلّا إذا وُجد تقابل بينها وَبين أعداد قابلة للعد

ملاحظة (2) : قدرة المجموعة المنتهية هي عدد عناصرها .

ملاحظة (3) : قدرة المجموعة المجموعة الغير منتهية نقول عنها قدرة مستمرة وَ نرمز لها بالحرف (C) ، اختصاراً لكلمة continuos - مستمر

ما هي الغاية مِنَ الأسئلة السابقة ؟

الغاية ـــ هي أنْ نمهد لنفهم التالي :

إنَّ علم الطبولوجيا هو ذلك العلم الذي يهتم بدراسة الخصائص الرياضية التي لا تتأثر عند التحول مِنْ فضاء رياضي إلى آخر .

وَ الطبولوجيا أيضاً ، هو العلم الذي يهتم بدراسة الخصائص الطبولوجية التي تنتقل من فراغ لآخر ←

بواسطة التشاكل.

- و تهتم الطبولوجيا أيضاً بدراسة الخصائص الميكانيكية المحفوظة وفقاً تشوهات غير مؤثرة بالمضمون الفعلي (أي مثلاً الشد أو الثني أو الإنحناء و لكن بدون قطع أو تمزيق)،

بمعنى أوضح ... تهتم الطبولوجيا بدراسة المجموعات المتغيرة و التي لا تتغير طبيعة محتوياتها،

و ذلك كان السبب بأنّ بعض علماء الرياضيات و الهندسة أطلقوا على الطبولوجيا اسم « الهندسة المطاطية »

- يمكن أنْ نفهم الخصائص الطبولوجية أو الصفات الطبولوجية « التي وَرَدَ ذكرها في السطر الأخير من الصفحة السابقة » بأنها تلك الصفات أو الخصائص التي لا تتغير بالتمدد و الإنشاء.

و بصياغة أوضح نقول أنّ الصفات الطبولوجية هي صفات ليست كمية، فمثلاً الطول و العرض و الإرتفاع هي صفات كمية و بالتالي ليست صفات طبولوجية.

في بدايات القرن العشرين باتت الطبولوجيا علماً رياضياً مستقلاً، و قد استندت آنذاك بشكل كبير على نظرية المجموعات، و سنلاحظ بدءاً من المحاضرة القادمة أنّ ←

أنَّ مادة الطبولوجيا (1) تقوم في صلبها على توسيع مفهوم المجموعة ليأخذ أشكال وَ خواص أخرى ترتبط مع المفاهيم الطبولوجية وَ إنَّ محور دراستنا في هذه المادة يقوم على دراسة نوع جديد من الفضاءات هو الفضاء المتري ، وَ الطبولوجي ، وَ دراسة بعض التطبيقات البسيطة كمفهوم تقارب المتتاليات وَ التطبيقات المستمرة في الفضاء المتري....

ملاحظات هامة :

1- المجموعتين اللتين بينهما تقابل نسميهما مجموعتين متكافئتين.

2- التقابل بين مجموعتين يعني أنْ يكون لهما نفس عدد العناصر، وَ ذلك لا ينطبق على المجموعات الغير منتهية.

3- إنَّ أصغر المجموعات الغير منتهية هي مجموعة الأعداد الطبيعية N ، وَ قدرتها تسمى القدرة الأولى ($\aleph$) ، وَ هي أصغر القدرات.

4- إنَّ أي مجموعة تكافئ المجموعة N هي مجموعة قابلة للعد.

* فمثلاً: إنَّ مجموعة الأعداد الزوجية التي هي جزء من N هي مجموعة تكافئ N ←

وذلك على أساس كل عدد من N يقابله ضعفه :

$n \longrightarrow 2n$

إذاً مجموعة الأعداد الزوجية قابلة للعد .

5- إن أي مجال مفتوح أو نصف مفتوح أو مغلق فلدينا مستمر (c) ، أي مجموعة نقاطه غير قابلة للعد . $K < C$ *

نختتم المحاضرة التمهيدية بذكر مفردات مادة الطبولوجيا (1) :

ثانياً : مفردات مقرر الطبولوجيا (1) :

1- مفهوم الفضاء المتري .

2- الكرة المفتوحة و الكرة المغلقة في مجموعة فضاء متري .

3- جوار نقطة في مجموعة فضاء متري .

4- النقطة الداخلية في مجموعة جزئية من مجموعة فضاء متري .

5- المجموعة المفتوحة في مجموعة فضاء متري .

6- داخلية مجموعة جزئية من مجموعة فضاء متري .

7- المجموعة المغلقة لمجموعة فضاء متري .

8- نقطة التراكم لمجموعة جزئية من

مجموعة فضاء متري ....

9- مشتقة مجموعة جزئية من مجموعة فضاء متري ....

10- النقطة اللاصقة بمجموعة جزئية من مجموعة فضاء متري ....

11- لصاقة مجموعة جزئية من مجموعة فضاء متري ....

12- المجموعة الجزئية الكثيفة من مجموعة فضاء متري ....

13- الفضاء المتري المفصول (القابل للفصل).

14- النقطة الجبهية لمجموعة جزئية من مجموعة فضاء متري ....

15- جبهية (حدود) مجموعة جزئية من مجموعة فضاء متري ....

16- النقطة الخارجية من مجموعة جزئية من مجموعة فضاء متري ....

17- المجموعة الجزئية الخارجية من مجموعة فضاء متري ....

18- المجموعة الجزئية المحدودة من مجموعة فضاء متري ....

19- المسافة بين مجموعتين جزئيتين من مجموعة فضاء متري ....

20- الفضاء المتري الجزئي ....

21 - مفهوم المتتاليات في الفضاء المتري .

22 - مفهوم تقارب المتتاليات في الفضاء المتري .

23 - دراسة المفاهيم (5 و 7 و 8) باستخدام مفهوم المتتاليات في الفضاء المتري .

24 - متتاليات كوشي في الفضاء المتري .

25 - الفضاء المتري التام .

26 - التطبيقات المستمرة في الفضاء المتري .

27 - الفضاء المتري المتراص .

28 - الفضاء المتري المترابط (المتصل - المتسلسل)

29 - مفهوم المجموعات المحدبة .

انتهى

انتهت المحاضرة الأولى .

(التمهيدية)

إعداد : داني معوض - وهب الحسن

أعطيت المحاضرة بتاريخ :

الثلاثاء / ٣ - ١٠ - ٢٠١٧م